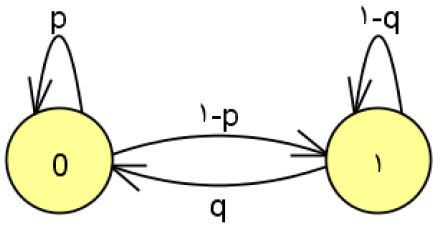
پاسخ بعضی از تمرین‌های بخش نخست

۱-۱



$$P = \begin{bmatrix} p & ۱-p \\ q & ۱-q \end{bmatrix}$$

$$P(n) = \begin{bmatrix} P_0(n) \\ P_۱(n) \end{bmatrix} \Leftrightarrow P_0(n) = ۱ - P_۱(n)$$

$$P_0(n+۱) = P_{۱,0}P_۱(n) + P_{0,0}P_0(n) = qP_۱(n) + pP_0(n) = q\big(۱ - P_0(n)\big) + pP_0(n) = q + (p-q)P_0(n)$$

$$P_0(n) = q + (p-q)P_0(n-۱) = q + (p-q)[q + (p-q)P_0(n-۲)] = \cdots$$
$$= (p-q)^n P_0(0) + q\sum_{k=0}^{n-۱}(p-q)^k$$
$$= (p-q)^n P_0(0) + q\left(\frac{۱-(p-q)^n}{۱-(p-q)}\right)$$
$$= (p-q)^n\left[P_0(0) + \frac{\mathrm{q}}{۱-p+q}\right] + \frac{\mathrm{q}}{۱-p+q}$$
$$\Longrightarrow n \to \infty : P_0(n) = \frac{\mathrm{q}}{۱-p+q}$$

مدل گیلبرت

۱ – ۲ –

X_0تعداد ثبت نام اولیه

p_n احتمال قبولی در هر امتحان

X_n تعداد ردشدگانِ امتحان n-ام

$$X_{n+۱} = X_n - y_{n+1}(X_n)$$

$y_{n+1}(X_n)$ تعداد دانشجویان قبول شده در امتحان n + ۱

$$P[y_{n+1}(X_n) = j | X_n = i] = \binom{i}{j} {p_n}^j (۱ - p_n)^{i-j}, j = 0,۱,۲,..,i$$

$$P[X_{n+۱} = j | X_n = i] = P[X_n - y_{n+1}(X_n) = j | X_n = i] = P[y_{n+1}(X_n) = i - j | X_n = i]$$
$$= \binom{i}{i-j} {p_n}^{i-j} (۱ - p_n)^j$$

۱ – ۳- جواب نهائی

توزیع هندسی:

$$p_{s_j}(k) = (۱ - P_{j,j}) P_{j,j}^{k-۱}$$

با میانگین

$$m_{s_j} = \frac{۱}{۱ - P_{j,j}}$$

پاسخ بعضی از تمرین‌های بخش دوم

۲ – ۲ – ب

متناوب با تناوب حداقل درجهٔ ۲- پس همگرا نمی‌شود.

۲ – ۲ – ج

یادآوری $\sum_i d(i) = ۲m$

$$P_{i,j} = \begin{cases} \frac{۱}{d(i)}, (i,j) \in E \\ 0 \end{cases}$$

$$[\pi P]_j = \sum_i \pi_i P_{ij} = \sum_{(i,j)\in E} \frac{d(i)}{۲m} \frac{۱}{d(i)} = \sum_{(i,j)\in E} \frac{۱}{۲m} = \frac{d(i)}{۲m}$$